



RR-0617

First Year B. Sc./B. A. Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - II

(Calculus & Differential Equations)

(New Course)

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 105

સૂચના

(૧)

નીચે દર્શાવેલ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of signs on your answer book.

Name of the Examination :
F. Y. B. Sc. / B. A.

Name of the Subject :
Mathematics : Paper - 2 (New)

Subject Code No. : 0 6 1 7 Section No. (1, 2,.....): Nil

Seat No. :

Student's Signature

- (૨) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
(૩) જમણી બાજુના અંક ગુણ સૂચવે છે.
(૪) પ્રયક્ષિત સંકેતોને અનુસરો.

૧ નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

૧૫

(૧) જો $y = \frac{2x+3}{3x+2}$ હોય તો y_n શોધો.

(૨) $y = \sin x$, વક્રની વક્રતા $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ એ શોધો.

(૩) $\lim_{x \rightarrow 0} x \log \tan x$ ની કિંમત શોધો.

(૪) $\int_0^{\pi/4} \sin^4 2x \, dx$ ની કિંમત શોધો.

(૫) ઉકેલો : $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y}{1-x}$.

(૬) $\sin x \frac{dy}{dx} + 4y \cos x = \cot x$ નો સંકલ્પકારક અવયવ શોધો.

(૭) ઉકેલો : $\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$.

(૮) સાબિત કરો કે $y = \log x$ હંમેશાં અધઃ અંતર્ભુજ છે.

(૯) $f(x) = 1 - (x-1)^{3/2}$, $x \in [0, 2]$ માટે રોલનું પ્રમેય ચકાસો.

(૧૦) $z = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3$ હોય તો $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ શોધો.

૨ (અ) બે વિધેયોના ગુણાકાર માટેનું લીબનીટનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૬

(બ) જો $y = \frac{3x+1}{(x+1)^2(x-2)}$ હોય તો y_n શોધો. ૬

(ક) જો $y = e^{m \sin^{-1} x}$ હોય તો સાબિત કરો કે
 $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)x y_{n+1} - (n^2 + m^2)y_n = 0.$ ૬

અથવા

૨ (અ) જો $y = (ax+b)^m$; $m \in N$ હોય તો y_n મેળવો અને તે પરથી ૬

$y = (ax+b)^{-m}$ માટે y_n મેળવો.

(બ) જો $y = \sin kx + \cos kx$ હોય તો સાબિત કરો કે ૬

$$y_n = k^n \left[1 + (-1)^n \sin 2kx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

(ક) જો $y = \cos(m \log x)$ હોય તો સાબિત કરો કે ૬

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)x y_{n+1} + (m^2 + n^2)y_n = 0.$$

૩ (અ) કોશીનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૬

(બ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x + \log(1-x)}{x \tan x (e^x - 1)}$ ની કિંમત શોધો. ૬

(ક) $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$; $[0, \pi]$ માટે રોલનું પ્રમેય ચકાસો. ૬

અથવા

૩ (અ) લાગ્રાન્જનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૬

(બ) સાબિત કરો કે ૬

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x; x > 0.$$

(ક) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$, વિધેય કયા અંતરાલમાં વધતું કે ઘટતું છે તે નક્કી કરો. ૬

૪ (અ) $\int \cos^n x \, dx$ નું લઘુકરણ સૂત્ર મેળવો અને તે પરથી $\int \cos^5 x \, dx$ ની કિંમત મેળવો. ૬

(બ) વક્ર $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ માટે વક્રતા શોધો. ૬

(ક) વક્ર $y = (x^2 + 4x + 5)e^{-x}$ માટે વક્રનાં વક્રતા-પરિવૃત્તિ બિંદુઓ શોધો. ૬

અથવા

૪ (અ) વક્રનાં પ્રાયલ સમીકરણો માટે વક્રતા ત્રિજ્યાનું સૂત્ર મેળવો. ૬

(બ) $\int x^m \cos nx \, dx$ નું લઘુકરણ સૂત્ર મેળવો અને તે પરથી $\int x^3 \cos 3x \, dx$ ની કિંમત મેળવો. ૬

(ક) $y = \frac{x^2 - 5x + 10}{x - 3}$ ના અનંત સ્પર્શકો શોધો. ૬

૫ (અ) વિકલ સમીકરણ $M \, dx + N \, dy = 0$ યથાર્થ બને તે માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત લખો અને સાબિત કરો. ૬

(બ) ઉકેલો : $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2x+2y-1}$. ૬

(ક) ઉકેલો : $(\sin x \sin y + \sec^2 x) \, dx + (\tan^2 y - \cos x \cos y) \, dy = 0$. ૬

અથવા

૫ (અ) બર્નોલીના વિકલ સમીકરણની વ્યાખ્યા આપી તેને ઉકેલવાની રીત સમજાવો. ૬

(બ) ઉકેલો : $x \log x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$. ૬

(ક) ઉકેલો : $\frac{dy}{dx} + y = e^x \cdot y^4$. ૬

૬ (અ) લાગ્રાન્જનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેને ઉકેલવાની રીત વર્ણવો. ૬

(બ) ઉકેલો : $y = 2px - p\sqrt{x}$. ૬

(ક) ઉકેલો : $y^2 = xy p + f\left(\frac{y p}{x}\right)$. ૬

અથવા

૬ (અ) વિકલ સમીકરણ $f(x, y, p) = 0$ જો p માટે ઉકેલનીય હોય તો તેને ઉકેલવાની રીત સમજાવો. ૬

(બ) ઉકેલો : $p^2 y + 2 p x = y$. ૬

(ક) ઉકેલો : $e^{3x} (p-1) + p^3 e^{2y} = 0$. ૬

ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) As per the Instruction no. 1 of page no. 1.
 (2) All the questions are **compulsory**.
 (3) Figures to the **right** indicate marks.
 (4) Follow usual notations.

1 Answer the following questions : 15

(1) If $y = \frac{2x+3}{3x+2}$ then find y_n .

(2) Obtain curvature of the curve $y = \sin x$ at $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

(3) Evaluate : $\lim_{x \rightarrow 0} x \log \tan x$.

(4) Evaluate : $\int_0^{\pi/4} \sin^4 2x \, dx$.

(5) Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y}{1-x}$.

(6) Find the integrating factor of

$$\sin x \frac{dy}{dx} + 4 y \cos x = \cot x.$$

(7) Solve : $\sin p x \cos y = \cos p x \sin y + p$.

(8) Show that $y = \log x$ is always concave downwards.

(9) Verify Rolle's theorem for the function

$$f(x) = 1 - (x-1)^{3/2}, \quad x \in [0, 2].$$

(10) If $z = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3$ then find $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2 (a) State and prove Leibnitz's theorem for the product of two functions. **6**

(b) If $y = \frac{3x+1}{(x+1)^2(x-2)}$ then find y_n . **6**

(c) If $y = e^{m \sin^{-1} x}$ then prove that **6**

$$(1-x^2) y_{n+2} - (2n+1) x y_{n+1} - (n^2 + m^2) y_n = 0.$$

OR

2 (a) If $y = (ax+b)^m$; $m \in N$ then find y_n . Using it obtain **6**

$$y_n \text{ for } y = (ax+b)^{-m}.$$

(b) If $y = \sin kx + \cos kx$ then prove that **6**

$$y_n = k^n \left[1 + (-1)^n \sin 2kx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

(c) If $y = \cos(m \log x)$ then prove that **6**

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1) x y_{n+1} + (m^2 + n^2) y_n = 0.$$

3 (a) State and prove Cauchy's theorem. **6**

(b) Evaluate : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x + \log(1-x)}{x \cdot \tan x \cdot (e^x - 1)}$. **6**

(c) Verify Rolle's theorem for $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$; $[0, \pi]$. **6**

OR

- 3 (a) State and prove Lagrange's theorem. **6**
 (b) Prove that : **6**
- $$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x; x > 0.$$
- (c) Decide in which interval $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ is **6**
 increasing or decreasing ?
- 4 (a) Obtain a reduction formula for $\int \cos^n x dx$ and hence **6**
 evaluate $\int \cos^5 x dx$.
- (b) Find the curvature of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. **6**
 (c) Find the point of inflection for the curve **6**
 $y = (x^2 + 4x + 5)e^{-x}$.

OR

- 4 (a) Obtain the formula of radius of curvature for the **6**
 parametric equations of a curve.
- (b) Obtain a reduction formula for $\int x^m \cos nx dx$ and hence **6**
 evaluate $\int x^3 \cos 3x dx$.
- (c) Find asymptotes for the curve $y = \frac{x^2 - 5x + 10}{x - 3}$. **6**
- 5 (a) State and prove the necessary and sufficient condition **6**
 for the differential equation $M dx + N dy = 0$ to be exact.
- (b) Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{2x + 2y - 1}$. **6**
 (c) Solve : $(\sin x \sin y + \sec^2 x) dx + (\tan^2 y - \cos x \cos y) dy = 0$. **6**

OR

- 5 (a) Define : Bernoulli's differential equation and explain **6**
 the method to solve it.

- (b) Solve : $x \log x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$. **6**
- (c) Solve : $\frac{dy}{dx} + y = e^x \cdot y^4$. **6**
- 6** (a) State Lagrange's differential equation and explain the method to solve it. **6**
- (b) Solve : $y = 2px - p\sqrt{x}$. **6**
- (c) Solve : $y^2 = xyp + f\left(\frac{yp}{x}\right)$. **6**
- OR**
- 6** (a) Explain the method to obtain general solution for the differential equation $f(x, y, p) = 0$, which is solvable in p . **6**
- (b) Solve : $p^2y + 2px = y$. **6**
- (c) Solve : $e^{3x}(p-1) + p^3 e^{2y} = 0$. **6**
-